

Points et vecteurs dans un repère : Résumé de cours et méthodes

1 L'essentiel du cours

Si dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , on a $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ alors :

- le vecteur \vec{AB} est tel que : $\vec{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.
- le milieu I de $[AB]$ est tel que : $I \begin{pmatrix} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} \end{pmatrix}$.
- la distance AB est telle que $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$. (si le repère est orthonormé)

Si dans une base (\vec{i}, \vec{j}) , on a $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors :

- pour tout réel k , $k\vec{u} \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$ et $\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$.
- le déterminant de \vec{u} et \vec{v} est le réel noté $\det(\vec{u}, \vec{v})$ tel que :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$$

- les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont **colinéaires** si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.
- la norme du vecteur \vec{u} (c'est à dire sa longueur) est le réel noté $\|\vec{u}\|$ tel que : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$. (si la base est orthonormée)

2 Comment déterminer les coordonnées d'un point M défini par une relation vectorielle ?

Méthode générale :

- On pose $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
- On exprime la relation vectorielle avec les coordonnées.
- En utilisant que deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes abscisses et les mêmes ordonnées, on en déduit les valeurs de x et y .

Exemple : On considère les points $A \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Déterminons les coordonnées du point M tel que $\vec{AM} = 3\vec{AB}$.

On pose $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. On a $\vec{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ et, donc, $3\vec{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 15 \end{pmatrix}$

Comme $\vec{AM} \begin{pmatrix} x - 2 \\ y + 1 \end{pmatrix}$, on en déduit que $\begin{cases} x - 2 = 13 \\ y + 1 = 15 \end{cases}$.

On a donc $x = 15$ et $y = 14$. D'où, $M \begin{pmatrix} 15 \\ 14 \end{pmatrix}$.

3 Comment montrer que trois points A , B et C sont alignés connaissant leurs coordonnées ?

Méthode générale :

- On détermine les coordonnées des vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} .
- On vérifie que le déterminant de \vec{AB} et \vec{AC} est nul.
(ce qui prouve leur colinéarité et l'alignement des points)

Exemple : Montrons que les points $A \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \end{pmatrix}$ et $C \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix}$ sont alignés.

On a $\vec{AB} \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$ et $\vec{AC} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$.

$$\text{Donc, } \det(\vec{AB}, \vec{AC}) = \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 9 & 6 \end{vmatrix} = 6 \times 6 - 9 \times 4 = 36 - 36 = 0.$$

Les points A , B et C sont bien alignés.